Correction Feuille Exercice 19

Étude de convergence en passant par les sommes partielles

Exercice 14 (*)
Justifier la convergence des séries suivantes et calculer leur somme (pour $k \in \mathbb{N}$ fixé et $x \in \mathbb{R}$) :

1. On note les sommes partielles $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} - 1$. Or la série $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}$ est une série exponentielle convergente donc $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n!}$ converge et
$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e - 1}$$
2. On note les sommes partielles $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k!} - 1$. Or la série $\sum_{n\geq 0} \frac{2^n}{n!}$ est une série exponentielle convergente donc $\sum_{n\geq 1} \frac{2^n}{n!}$ converge et
$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n!} = e^2 - 1}$$
3. On note les sommes partielles
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{3^k}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{3^{k-1}}{k!} = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n+1} \frac{3^k}{k!} = \frac{1}{3}\left(\sum_{k=0}^{n+1} \frac{3^k}{k!} - 1\right).$$
Or la série $\sum_{n\geq 0} \frac{3^n}{n!}$ est une série exponentielle convergente donc $\sum_{n\geq 1} \frac{3^n}{(n+1)!}$ converge et
$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{(n+1)!} = \frac{1}{3}(e^3 - 1)}$$
4. On note les sommes partielles
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{3^k}{2^{2k+1}} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{3^k}{(2^2)^k} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{3}{4}\right)^k = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{3}{4}\right)^{k+1} = \frac{3}{8}\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{3}{4}\right)^k.$$
Or la série $\sum_{n\geq 0} \left(\frac{3}{4}\right)^n$ est une série géométrique convergente donc $\sum_{n\geq 1} \frac{3^n}{2^{2n+1}}$ converge et
$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{2^{2n+1}} = \frac{3}{8}\frac{1}{\left(1-\frac{3}{4}\right)} = \frac{3}{2}}$$
5. On note les sommes partielles
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1+2^k}{4^{k+1}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{4^{k+1}} + \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{4^{k+1}} = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{4^k} + \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k.$$
Or les séries $\sum_{n\geq 0} \left(\frac{1}{4}\right)^n$ et $\sum_{n\geq 0} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ sont des séries géométrique convergentes donc $\sum_{n\geq 0} \frac{1+2^n}{4^{n+1}}$ converge et

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1+2^n}{4^{n+1}} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{\left(1-\frac{1}{4}\right)} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}}$$

6. On note les sommes partielles

$$S_N = \sum_{n=k}^{N} \frac{\binom{n}{k}}{n!} = \sum_{n=k}^{N} \frac{n!}{k!(n-k)!} \times \frac{1}{n!} = \frac{1}{k!} \sum_{n=k}^{N} \frac{1}{(n-k)!} = \frac{1}{k!} \sum_{n=0}^{N-k} \frac{1}{n!}.$$

(On peut sortir le $\frac{1}{k!}$ puisque la variable de la somme est n. On obtient la dernière somme à l'aide d'un changement de variable). Or la série $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}$est une série exponentielle convergentes donc $f = \sum_{n\geqslant k} \frac{\binom{n}{k}}{n!}$. converge et

$$\boxed{\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{\binom{n}{k}}{n!} = \frac{e}{k!}}$$

Exercice 15 (**)

Considérons la suite :

$$u_n = \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right).$$

1. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} u_n &= \ln\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right) = \ln\left(\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}\right) \\ &= \ln(n+1) - \ln(n^2) + \ln(n-1) \\ &= \ln(n+1) - \ln(n) - (\ln(n) - \ln(n-1)) \end{aligned}$$

On remarque que u_n est de la forme $a_{n+1} - a_n$ avec $a_n := \ln(n) - \ln(n-1)$. En passant par les sommes partielles,

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} u_k = \sum_{k=2}^{n} a_{k+1} - a_k = a_{n+1} - a_2$$

Or $a_{n+1} = \ln(n+1) - \ln(n) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$, ainsi $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ et $a_2 = \ln(2)$. Ainsi, la série de terme général u_n converge et

$$\boxed{\sum_{n=2}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} S_n = -\ln(2)}$$

2. On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} v_n &= \ln\left(\frac{(n+1)(n+3)}{n(n+2)}\right) \\ &= \ln(n+3) - \ln(n+2) + \ln(n+1) - \ln(n) \end{aligned}$$

En passant par les sommes partielles,

$$\begin{aligned} S_n = \sum_{k=1}^{n} v_k &= \sum_{k=1}^{n} \ln(k+3) - \ln(k+2) + \ln(k+1) - \ln(k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \ln(k+3) - \ln(k+2) + \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \ln(k) \\ &= \ln(n+3) - \ln(3) + \ln(n+1) - \ln 1 \\ &= \ln((n+3)(n+1)) - \ln(3) \end{aligned}$$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = +\infty$.

$$\boxed{\text{Ainsi, la série de terme général } v_n \text{ diverge}}$$

Séries géométriques ou exponentielles

Exercice 16 ()
Justifier la convergence des séries suivantes et calculer leur somme (pour $k \in \mathbb{N}$ fixé et $x \in \mathbb{R}$) :

1. La série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{n(n-1)}{6^{n-2}}$ est un série géométrique dérivée convergente (car $\dfrac{1}{6} < 1$). La série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{n(n-1)}{6^n}$ est donc convergente et

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{6^n} = \frac{1}{36} \times \frac{2}{\left(1-\frac{1}{6}\right)^3} = \frac{2 \times 6}{5^3} = \frac{12}{125}}$$

2. En passant par les sommes partielles

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{2^k} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{2}\right)^{k+1} = -\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{2}\right)^k$$

La série $\sum\limits_{n \geq 0} \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$ est une série géométrique convergente (car $-1 < -1/2 < 1$). La série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{(-1)^n}{2^n}$ est donc convergente et

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} = -\frac{1}{2} \frac{1}{1-(-\frac{1}{2})} = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{\frac{3}{2}} = -\frac{1}{3}}$$

3. En passant par les sommes partielles

$$\sum_{k=2}^{n} k(-1)^k x^{k-2} = \sum_{k=1}^{n-1} k(-x)^{k-2} - (-x)^{-1} = -\frac{1}{x} \sum_{k=1}^{n-1} k(-x)^{k-1} + \frac{1}{x}$$

La série $\sum\limits_{n \geq 1} n(-x)^{n-1}$ est une série géométrique convergente si et seulement si $-1 < x < 1$. $\forall x \in]-1;1[$, la série $\sum\limits_{n \geqslant 2} n(-1)^n x^{n-2}$ est <u>convergente</u> et

$$\boxed{\sum_{n=2}^{+\infty} n(-1)^n x^{n-2} = -\frac{1}{x} \times \frac{1}{(1-(-x))^2} + \frac{1}{x} = -\frac{1}{x(1+x)^2} + \frac{1}{x}}$$

Sinon la série est <u>divergente</u>.

Exercice 17 (*)

1. Soit $p \in]0,1[$ et $q = 1-p$.
   - En passant par les sommes partielles

$$\sum_{k=1}^{n} pq^{k-1} = p \sum_{k=1}^{n} q^{k-1} = p \sum_{k=0}^{n-1} q^k$$

Or la série $\sum\limits_{n \geq 0} q^n$ est une série géométrique convergente (car $q \in]0,1[$), donc la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} pq^{n-1}$ est <u>convergente</u> et

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} pq^{n-1} = p\frac{1}{1-q} = \frac{p}{p} = 1}$$

- La série $\sum_{n\geq 1} nq^{n-1}$ est une série géométrique convergente (car $q \in]0,1[$), donc la série $\sum_{n\geqslant 1} npq^{n-1}$ est convergente et

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} npq^{n-1} = p\frac{1}{(1-q)^2} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}}$$

- En passant par les sommes partielles

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k^2pq^{k-1} &= p\sum_{k=1}^{n}(k^2-k+k)q^{k-1} \\
&= p\left(\sum_{k=1}^{n} k(k-1)q^{k-1} + \sum_{k=1}^{n} kq^{k-1}\right) \\
&= p\left(q\sum_{k=2}^{n} k(k-1)q^{k-2} + \sum_{k=1}^{n} kq^{k-1}\right)
\end{aligned}$$

Or les séries $\sum_{n\geq 2} n(n-1)q^{n-2}$ et $\sum_{n\geq 1} nq^{n-1}$ sont des séries géométriques convergente (car $q \in]0,1[$), donc la série $\sum_{n\geqslant 1} n^2pq^{n-1}$ est convergente et

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} n^2pq^{n-1} = p\left(q\frac{2}{(1-q)^3} + \frac{1}{(1-q)^2}\right) = p\left(\frac{2q}{p^3} + \frac{p}{p^3}\right) = \frac{q+q+p}{p^2} = \frac{1+q}{p^2}}$$

2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
   - La série $\sum_{n\geq 0} \frac{\lambda^n}{n!}$ est une série exponentielle, donc la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}$ est convergente et

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} = e^{-\lambda}e^{\lambda} = 1}$$

   - En passant par les sommes partielles

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{k\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} &= e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{n} \frac{k\lambda^k}{k!} \\
&= e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \\
&= e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^{k+1}}{k!} = \lambda e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k}{k!}
\end{aligned}$$

   Or la série $\sum_{n\geq 0} \frac{\lambda^n}{n!}$ est une série exponentielle donc la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}$ est convergente et

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} = \lambda e^{-\lambda}e^{\lambda} = \lambda}$$

- En passant par les sommes partielles

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \frac{k^2\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} &= e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{n} \frac{k\lambda^k}{(k-1)!} \\
&= e^{-\lambda}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(k-1)\lambda^k}{(k-1)!} + \frac{\lambda^k}{(k-1)!}\right) \\
&= e^{-\lambda}\left(\sum_{k=2}^{n} \frac{\lambda^k}{(k-2)!} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda^k}{(k-1)!}\right) \\
&= e^{-\lambda}\left(\sum_{k=0}^{n-2} \frac{\lambda^{k+2}}{k!} + \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^{k+1}}{k!}\right) \\
&= e^{-\lambda}\left(\lambda^2\sum_{k=0}^{n-2} \frac{\lambda^k}{k!} + \lambda\sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k}{k!}\right)
\end{aligned}$$

Or la série $\sum_{n\geq 0} \frac{\lambda^n}{n!}$ est une série exponentielle donc la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^2\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}$ est convergente et

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} = e^{-\lambda}(\lambda^2 e^{\lambda} + \lambda e^{\lambda}) = \lambda^2+\lambda = \lambda(\lambda+1)}$$

Comparaison de séries

Exercice 18 (Série divergente)
On a pour tout $n \geq 2$

$$\begin{aligned}
n^2 - 1 \leq n^2 &\iff \frac{1}{n^2-1} \geq \frac{1}{n^2} \quad \text{(La fonction inverse est décroissante sur } \mathbb{R}_+^*) \\
&\iff \frac{n}{n^2-1} \geq \frac{1}{n} \quad \text{(multiplication par } n>0)
\end{aligned}$$

Je sais que la série $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n}$ est une série de Riemann divergente et que cette série est à termes positifs,
Or j'ai appris que si deux suites (u_n) et (v_n) à termes positifs vérifient pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$ et si la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ diverge vers $+\infty$ alors la série $\sum_{n\geqslant} v_n$ diverge vers $+\infty$.
Donc je conclus que

$$\boxed{\sum_{n\geqslant 2} \frac{n}{n^2-1} \text{ diverge.}}$$

Exercice 19
Pour tout $n \geq 3$,

$$\begin{aligned}
\ln(n) \geq \ln 3 &\iff \frac{1}{\ln(n)} \leq \frac{1}{\ln(3)} \\
&\iff \frac{5}{4^n \ln(n)} \leq \frac{5}{\ln(3)} \times \frac{1}{4^n}
\end{aligned}$$

Or la série $\sum_{n\geq 3} \frac{1}{4^n}$ est convergente (série géométrique avec $1/4 < 1$) donc la série $\sum_{n\geq 3} \frac{5}{\ln(3)} \times \frac{1}{4^n}$ est également convergente (par linéarité). Les termes des séries étant positifs, par comparaison,

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n\geq 3} \frac{5}{4^n \ln(n)} \text{ est convergente.}}$$

Exercice 20 (*)

1. On pose la fonction $f : x \to e^x - x$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$f'(x) = e^x - 1$$

On a $f'(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$. Donc f admet un minimum en $x = 0$ or $f(0) = 0$. Donc

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x \geq x.}$$

On pose la fonction $g : x \to x - \ln(x)$. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{x}$$

On a $g'(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 1$. Donc g admet un minimum en $x = 1$ or $g(1) = 1$. Donc

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad x \geq \ln(x).}$$

2. On a alors pour $n \in \mathbb{N}$,

$$e^{n^2} \geq n^2 \quad \Longleftrightarrow \quad e^{-n^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

Or la série $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente et les deux séries sont à termes positifs.

$$\boxed{\text{Par comparaison, la série } \sum_{n\geq 0} e^{-n^2} \text{ est convergente.}}$$

On a également pour $n \geq 2$,

$$n \geq \ln(n) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{n} \leq \frac{1}{\ln(n)}$$

Or la série $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n}$ est une série de Riemann divergente (à termes positifs)

$$\boxed{\text{Par comparaison, la série } \sum_{n\geq 0} \frac{1}{\ln(n)} \text{ est divergente.}}$$

Exercice 21 (*)

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, La fonction $x \to x\ln(x)$ est continue sur $[2, n]$ donc

$$\begin{aligned}\int_2^n \frac{1}{x\ln(x)}dx &= [\ln(\ln(|x|))]_2^n \\ &= \ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2))\end{aligned}$$

2. Soit $k \geq 2$. On a pour tout $x \in [k, k+1]$,

$$\begin{aligned}x\ln(x) \geq k\ln(k) \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{1}{x\ln(x)} \leq \frac{1}{k\ln(k)} \\ &\Longleftrightarrow \quad \int_k^{k+1} \frac{1}{x\ln(x)}dx \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k\ln(k)}dx \\ &\Longleftrightarrow \quad \int_k^{k+1} \frac{1}{x\ln(x)}dx \leq \frac{1}{k\ln(k)}\end{aligned}$$

3. On a donc pour $n \geq 2$,

$$\sum_{k=2}^{n} \int_{k}^{k+1} \frac{1}{x\ln(x)}dx \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} \iff \int_{2}^{n+1} \frac{1}{x\ln(x)}dx \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)}$$
$$\iff \ln(\ln(n+1)) - \ln(2) \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)}$$

Or $\lim_{n\to+\infty} \ln(\ln(n+1)) = +\infty$. Par comparaison, la suite des sommes partielles diverge donc

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n\geq 2} \frac{1}{n\ln(n)} \text{ diverge.}}$$

Exercice 22 (**)
Pour tout n, on note

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}.$$

Afin de bien comprendre, on introduit les suites $(u_n) := (S_{2n})$ et $(v_n) := (S_{2n+1})$. On vérifie que ces suites sont adjacentes.

— **Monotonie de** (u_n) : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= S_{2n+2} - S_{2n} \\ &= \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^k}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k} \\ &= \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+2} + \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} \\ &= \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+1} \\ &= \frac{2n+1-(2n+2)}{(2n+2)(2n+1)} \\ &= -\frac{1}{(2n+2)(2n+1)} < 0 \end{aligned}$$

La suite (u_n) et donc (S_{2n}) est décroissante.

— **Monotonie de** (v_n) : Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= S_{2n+3} - S_{2n+1} \\ &= \sum_{k=1}^{2n+3} \frac{(-1)^k}{k} - \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k} \\ &= \frac{(-1)^{2n+3}}{2n+3} + \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+2} \\ &= -\frac{1}{2n+3} + \frac{1}{2n+2} \\ &= \frac{-(2n+2)+(2n+3)}{(2n+2)(2n+3)} \\ &= \frac{1}{(2n+2)(2n+3)} > 0 \end{aligned}$$

La suite (v_n) et donc (S_{2n+1}) est décroissante.

— Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} v_n - u_n &= \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k} \\ &= \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} = -\frac{1}{2n+1} \end{aligned}$$

Donc, $\lim_{n \to +\infty} v_n - u_n = 0$.

$$\boxed{\text{Les suites } (S_{2n}) \text{ et } (S_{2n+1}) \text{ sont donc adjacentes.}}$$

Les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) convergent donc vers la même limite $\ell \in \mathbb{R}$. Il semble dès lors cohérent que la suite des sommes partielles (S_n) (et donc la série $\sum_n \frac{(-1)^n}{n}$) converge vers ℓ. C'est un résultat bien connu en scientifique mais Hors programme en ECE. Comment le prouver ? Il faut malheureusement revenir à la définition :

$$(S_n) \text{ converge vers } \ell \iff \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |S_n - \ell| \leq \varepsilon$$

Soit $\varepsilon > 0$. Comme S_{2n} et (S_{2n+1}) convergent vers ℓ, il existe deux entiers N_1 et N_2 tels que

$$\forall p > N_1, |S_{2p} - \ell| \leq \varepsilon$$

$$\forall p > N_2, |S_{2p+1} - \ell| \leq \varepsilon$$

Posons alors $N = max(2N_1, 2N_2 + 1)$. On a alors pour tout $n \geq N$.

— Soit $n = 2p$ est un entier pair et dans ce cas, comme $2p > 2N_1$ alors $p > N_1$ et donc $|S_n - \ell| \leq \varepsilon$.
— Soit $n = 2p + 1$ est un entier impair et dans ce cas, comme $2p + 1 > 2N_2 + 1$ alors $p > N_2$ et donc $|S_n - \ell| \leq \varepsilon$.

Dans tous les cas, pour tout $n \geq N$, on a $|S_n - \ell| \leq \varepsilon$. On en déduit que la suite (S_n) converge et donc

$$\boxed{\text{La série } \sum_n \frac{(-1)^n}{n} \text{ converge.}}$$

Exercice 23 (***)

Comme la série de terme général u_n est convergente, S et R_n sont bien définies. De plus $\lim_{n \to +\infty} S_n = S$. On a

$$S_n + R_n = S \iff R_n = S - S_n.$$

En passant à la limite, on voit que (R_n) converge et

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} R_n = S - S = 0.}$$